**PAPER**

**STATISTIKA MULTIVARIAT**

**MATRIKS VARIANSI DAN KOVARIANSI**

****

**DI SUSUN OLEH :**

1. **NAILY RAHMANINGSIH (K1310058)**
2. **MARINA RAMDHANI C (K1310051)**

**PENDIDIKAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN**

**UNIVERSITAS SEBELAS MARET SURAKARTA**

**2014**

1. **Variansi dan Kovariansi untuk Variabel** $X\_{1}$ **dan** $X\_{2}$

Misalnya terdapat n pasang nilai dari variabel $X\_{1}$ dan variabel $X\_{2}$, seperti berikut ini

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| No Subjek | $$X\_{1}$$ | $$X\_{2}$$ |
| 1 | $$X\_{11}$$ | $$X\_{21}$$ |
| 2 | $$X\_{12}$$ | $$X\_{22}$$ |
| ... | ... | ... |
| n | $$X\_{1n}$$ | $$X\_{2n}$$ |

Variansi variabel $X\_{1}$, variansi variabel $X\_{2}$, dan kovariansi antara variabel $X\_{1}$ dan $X\_{2}$ didefinisikan berturut-turut sebagai berikut.

Variansi variabel $X\_{1}$ didefinisikan dengan

 $s\_{1}^{2}= \frac{\sum\_{}^{}(x\_{1}-\overbar{x\_{1}})^{2}}{n-1}$

Variansi variabel $X\_{2}$ didefinisikan dengan

 $s\_{2}^{2}= \frac{\sum\_{}^{}(x\_{2}-\overbar{x\_{2}})^{2}}{n-1}$

Kovariansi antara variabel $X\_{1}$ dan $X\_{2}$ didefinisikan dengan

$$s\_{12}= \frac{\sum\_{}^{}(x\_{1}-\overbar{x\_{1}})(x\_{2}-\overbar{x\_{2}})}{n-1}$$

Kovariansi antara variabel $X\_{2}$dan $X\_{1}$ didefinisikan dengan

$$s\_{21}= \frac{\sum\_{}^{}(x\_{2}-\overbar{x\_{2}})(x\_{1}-\overbar{x\_{1}})}{n-1}$$

Jika didefinisikan jumlah kuadrat dan jumlah produk (hasil kali) adalah sebagai berikut

 $SS\_{1}$ = $\sum\_{}^{}(x\_{1}-\overbar{x\_{1}})^{2}$ $SS\_{2}$ = $\sum\_{}^{}(x\_{2}-\overbar{x\_{2}})^{2}$

$SS\_{12}$ = $\sum\_{}^{}(x\_{1}-\overbar{x\_{1}})(x\_{2}-\overbar{x\_{2}})$ $SS\_{21}$ = $\sum\_{}^{}(x\_{2}-\overbar{x\_{2}})(x\_{1}-\overbar{x\_{1}})$

maka, variansi dan kovariansi untuk variabel $X\_{1}$ dan $X\_{2}$dapat dicari dari formula berikut ini,

 $s\_{1}^{2}=\frac{SS\_{1}}{n-1}$, $s\_{2}^{2}=\frac{SS\_{2} }{n-1}$, $s\_{12}$= $\frac{SS\_{12}}{n-1}$, $s\_{21}$= $\frac{SS\_{21} }{n-1}$

Untuk memudahkan komputasi, jumlah-jumlah kuadrat dan jumlah-jumlah produk di atas dapat dicari dengan komputasi berikut

 $SS\_{1}$ = $\sum\_{}^{}x\_{1}^{2}- \frac{\sum\_{}^{}x\_{1}^{2}}{n}$

 $SS\_{2}$ = $\sum\_{}^{}x\_{2}^{2}- \frac{\sum\_{}^{}x\_{2}^{2}}{n}$

 $SS\_{12}$ = $\sum\_{}^{}x\_{1}.x\_{2}- \frac{\sum\_{}^{}x\_{1}\sum\_{}^{}x\_{2}}{n}$

 $SS\_{21}$ = $\sum\_{}^{}x\_{2}.x\_{1}- \frac{\sum\_{}^{}x\_{2}\sum\_{}^{}x\_{1}}{n}$

1. **Matriks Variansi dan Kovariansi**

Pada variabel $X\_{1}$ dan $X\_{2} $didefinisikan matriks variansi dan kovariansi, dilambangkan dengan matriks S sebagai berikut

 S =$\left[\begin{matrix}s\_{1}^{2}&s\_{12}\\s\_{21}&s\_{2}^{2}\end{matrix}\right]$

Pada variabel $X\_{1}$ dan $X\_{2}$ didefinisikan matriks jumlah kuadrat dan jumlah produk W sebagai berikut

W =$ \left[\begin{matrix}SS\_{1} &SS\_{12}\\SS\_{21}&SS\_{2}\end{matrix}\right]$

Matriks variansi dan kovariansi S diperoleh dengan membagi matriks jumlah kuadrat dan jumlah produk W dengan n$-$1, sehingga diperoleh

 S = $\frac{W}{n-1}$

Perhatikan bahwa koefisien korelasi $r\_{12}$ dapat dicari dari formula $r\_{12}= \frac{s\_{12}}{s\_{1}s\_{2}}$, sehingga matriks S dapat ditulis menjadi

 S =$\left[\begin{matrix}s\_{1}^{2}&rs\_{1}s\_{2}\\rs\_{2}s\_{1}&s\_{2}^{2}\end{matrix}\right]$

Matriks S merupakan estimator dari matriks$ ∑$ yang berisi variansi dan kovariansi pada populasi, yang dirumuskan oleh

 $\sum\_{}^{}= \left[\begin{matrix}σ\_{1}^{2}&σ\_{12}\\σ\_{21}&σ\_{2}^{2}\end{matrix}\right]$ = $\left[\begin{matrix}σ\_{1}^{2}&ρσ\_{1}σ\_{2}\\ρσ\_{2}σ\_{1}&σ\_{2}^{2}\end{matrix}\right]$

**Contoh**

Misalnya terdapat dua variabel $X\_{1}$ dan $X\_{2} $dengan nilai-nilai seperti tabel berikut

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| No Subjek | $$X\_{1}$$ | $$X\_{2}$$ |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 7 |
|  | $\overbar{X\_{1}}$ = 2 | $\overbar{X\_{2}}$ = 4 |

Perhatikan bahwa terdapat 3 data pada tabel tersebut, yaitu pasangan nilai (1, 1), (3, 4) dan (2,7). Variansi $X\_{1}$, variansi $X\_{2}$ dan kovariansi antara $X\_{1}$ dan $X\_{2} $dapat dicari sebagai berikut

 $SS\_{1}$ = $\sum\_{}^{}(x\_{1}-\overbar{x\_{1}})^{2}$ = $(1-2)^{2}$ + $(3-2)^{2}+ (2-2)^{2}$ = 2

$⟹$ $s\_{1}^{2}=\frac{SS\_{1}}{n-1}$ = $\frac{2}{2}$ = 1

 $SS\_{2}$ = $\sum\_{}^{}(x\_{2}-\overbar{x\_{2}})^{2}$ = $(1-4)^{2}$ + $(4-4)^{2}+ (7-2)^{2}$ = 18

$⟹$ $s\_{2}^{2}=\frac{SS\_{2}}{n-1}$ = $\frac{18}{2}$ = 9

$SS\_{12}$ = $\sum\_{}^{}(x\_{1}-\overbar{x\_{1}})(x\_{2}-\overbar{x\_{2}})$

 = $(1-2)(1-4)$ + $(3-2)(4-4)$ + $(2-2)(7-2)$ = 3

$⟹$ $s\_{12}$= $\frac{SS\_{12}}{n-1}$ = $\frac{3}{2}$

$SS\_{21}$ = $\sum\_{}^{}(x\_{2}-\overbar{x\_{2}})(x\_{1}-\overbar{x\_{1}})$

 = $(1-4)(1-2)$ + $(4-4)(3-2)$ + $\left(7-2\right)\left(2-2\right)$ = 3

$⟹s\_{21}$= $\frac{SS\_{21} }{n-1}$ = $\frac{3}{2}$

W =$ \left[\begin{matrix}SS\_{1} &SS\_{12}\\SS\_{21}&SS\_{2}\end{matrix}\right]$ = $\left[\begin{matrix}2&3\\3&18\end{matrix}\right]$

 S = $\frac{W}{n-1}$ = $\frac{1}{2}$ $\left[\begin{matrix}2&3\\3&18\end{matrix}\right]$ = $\left[\begin{matrix}1&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&9\end{matrix}\right]$

atau S =$\left[\begin{matrix}s\_{1}^{2}&s\_{12}\\s\_{21}&s\_{2}^{2}\end{matrix}\right]$ = $\left[\begin{matrix}1&\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&9\end{matrix}\right]$

**Cara Lain Mencari Jumlah Kuadrat dan Jumlah Produk W**

Misalnya data variabel $X\_{1}$ dan $X\_{2}$ pada contoh ditulis lagi pada tabel berikut

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| No Subjek | $$X\_{1}$$ | $$X\_{2}$$ |
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 7 |
|  | $\overbar{X\_{1}}$ = 2 | $\overbar{X\_{2}}$ = 4 |

Berdasarkan data tersebut, diperoleh matriks X yang elemen-elemennya adalah nilai-nilai variabel $X\_{1}$ dan $X\_{2}$, sebagai berikut

X = $\left[\begin{matrix}1&1\\\begin{matrix}3\\2\end{matrix}&\begin{matrix}4\\7\end{matrix}\end{matrix}\right]$

Berdasarkan matriks X tersebut, dapat dicari matriks yang berisi rerata $X\_{1}$ dan rerata $X\_{2}$ yang disebut matriks rerata $\overbar{X}$ sebagai berikut

$$\overbar{X}= \left[\begin{matrix}2&4\\\begin{matrix}2\\2\end{matrix}&\begin{matrix}4\\4\end{matrix}\end{matrix}\right]$$

Dibentuk matriks deviasi $X\_{d}$, yaitu sebuah matriks yang elemen-elemennya menyatakan seberapa jauh nilai menyimpang dari reratanya, sebagai berikut.

$X\_{d}= X-$ $\overbar{X}$ = $\left[\begin{matrix}1&1\\\begin{matrix}3\\2\end{matrix}&\begin{matrix}4\\7\end{matrix}\end{matrix}\right]- \left[\begin{matrix}2&4\\\begin{matrix}2\\2\end{matrix}&\begin{matrix}4\\4\end{matrix}\end{matrix}\right]= \left[\begin{matrix}-1&-3\\\begin{matrix}1\\0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\end{matrix}\right]$

Perkalian antara $X^{'}\_{d}$ dan $X\_{d} $disebut matriks jumlah kuadrat dan jumlah produk W sehingga diperoleh

W = $X^{'}\_{d}$ $X\_{d}$

 = $\left[\begin{matrix}\begin{matrix}-1&1\end{matrix}&0\\\begin{matrix}-3&0\end{matrix}&3\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}-1&-3\\\begin{matrix}1\\0\end{matrix}&\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\end{matrix}\right]$

 = $\left[\begin{matrix}2&3\\3&18\end{matrix}\right]$

 Jika $X\_{d}$ ditulis dengan $X-$ $\overbar{X}$, maka W = $(X- \overbar{X})^{'}$ ($X-$ $\overbar{X}$).

 Matriks W dapat juga diperoleh dengan cara berikut

W = $\sum\_{i=1}^{n}(X\_{i}- \overbar{X})^{'}(X\_{i}- \overbar{X})$ dengan $X\_{i}$ adalah matriks yang elemen-elemennya adalah elemen-elemen matriks X pada baris ke-i. Dengan demikian diperoleh

W = $\sum\_{i=1}^{n}(X\_{i}- \overbar{X})^{'}(X\_{i}- \overbar{X})$

 = $\left(X\_{1}- \overbar{X}\right)^{'}\left(X\_{1}- \overbar{X}\right)+\left(X\_{2}- \overbar{X}\right)^{'}\left(X\_{2}- \overbar{X}\right)+(X\_{3}- \overbar{X})^{'}(X\_{3}- \overbar{X})$

 = $(\left[\begin{matrix}1&1\end{matrix}\right]-\left[\begin{matrix}2&4\end{matrix}\right])(\left[\begin{array}{c}1\\1\end{array}\right]-\left[\begin{array}{c}2\\4\end{array}\right])$ + $\left(\left[\begin{matrix}3&4\end{matrix}\right]-\left[\begin{matrix}2&4\end{matrix}\right]\right)\left(\left[\begin{array}{c}3\\4\end{array}\right]-\left[\begin{array}{c}2\\4\end{array}\right]\right)$ + $(\left[\begin{matrix}2&7\end{matrix}\right]-\left[\begin{matrix}2&4\end{matrix}\right])(\left[\begin{array}{c}2\\7\end{array}\right]-\left[\begin{array}{c}2\\4\end{array}\right])$

 = $\left[\begin{array}{c}-1\\-3\end{array}\right]\left[\begin{matrix}-1&-3\end{matrix}\right]$ + $\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right]\left[\begin{matrix}1&0\end{matrix}\right] $+ $\left[\begin{array}{c}0\\3\end{array}\right]\left[\begin{matrix}0&3\end{matrix}\right]$

 = $\left[\begin{matrix}1&3\\3&9\end{matrix}\right]+$ $\left[\begin{matrix}1&0\\0&0\end{matrix}\right]+ \left[\begin{matrix}0&0\\0&9\end{matrix}\right]$

 = $\left[\begin{matrix}2&3\\3&18\end{matrix}\right]$